2. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor (rendezett testek és Arkhimédeszi axióma)

1. Adott T rendezett testet akkor mondtunk Arkhimédeszinek, ha az alábbi axióma teljesül:

$$(\forall x \in T)\ (\exists n \in \mathbb{N}^+)\ n > x.$$

   Bizonyítsuk be, hogy az alábbiak mind ekvivalensek a fenti Arkhimédeszi axiómával, vagyis az alábbiakat is lehet Arkhimédeszi axiómának hívni!

   a) $(\forall x \in T)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ n > x$

   b) $(\forall x \in T)\ (\exists n \in \mathbb{Z})\ n > x$

   c) $(\forall x \in T)\ (\exists n \in \mathbb{Z})\ n < x$

   d) $(\forall a \in T, a > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N}^+)\ \frac{1}{n} < a$

2. Legyen T rendezett test, $\emptyset \neq H \subset T$. Állapítsuk meg az alábbi állításpárok logikai kapcsolatát!

   a) (i) $(\exists M \in T)\ (\forall x \in H)\ x < M$ (ii) $(\exists M \in T)\ (\forall x \in H)\ x \leq M$

   b) (i) $(\exists M \in T)\ (\forall x \in H)\ x \leq M$ (ii) $(\exists M \in H)\ (\forall x \in H)\ x \leq M$

   c) (i) $(\exists M \in T)\ (\forall x \in H)\ x < M$ (ii) $(\forall x \in H)\ (\exists M \in T)\ x < M$

3. Egészegyütthatós polinomon az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ alakú kifejezéseket értjük, ahol $n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$, valamint a 0-t. Jelölje $\mathbb{Z}[x]$ az egészegyütthatós polinomok halmazát, $\mathbb{Z}(x)$ pedig a (racionális) törtfüggvények halmazát, azaz a p/q alakú kifejezések halmazát, ahol $p, q \in \mathbb{Z}[x]$, $q \neq 0$.

   A p/q és r/s törtfüggvényeket akkor tekintünk egyenlőnek, ha átszorzás után azonosságot kapunk, azaz a ps és qr polinomok megegyeznek.

   a) Bizonyítsuk be, hogy a szokásos műveletekkel $\mathbb{Z}(x)$ testet alkot!

   A rendezést $\mathbb{Z}(x)$-en a következőképpen definiáljuk. Egy p/q törtfüggvényt akkor mondunk *pozitív*nak, ha p és q főegyütthatói azonos előjelűek. Akkor mondjuk, hogy $f < g$, ha $g - f$ ezen definíció szerint pozitív.

   b) Bizonyítsuk be, hogy ezzel a rendezéssel rendezett testet kapunk!

   c) Mely törtfüggvények a természetes számok ebben a rendezett testben?

   d) Bizonyítsuk be, hogy az Arkhimédeszi axióma nem teljesül ebben a rendezett testben!

   *e) Döntsük el, hogy a Cantor axióma teljesül-e!