

Többszörös analízis 2. vizsgatematika Osztatlan matematikatanár szak, 2021. tavasz

Közönséges differenciálegyenletek

Alapfogalmak, példák. Pillanatnyi változási sebesség. Példák időben változó folyamatok differenciálegyenlettel való leírására: egyedszám korlátlan növekedése, radioaktív bomlás, Newton-féle lehülési törvény, kémiai keverési folyamat. Differenciálegyenlet és kezdetiérték-feladat fogalma.

Szeparábilis differenciálegyenletek. Általános alak, tétel a megoldásokról, példák: $y' = ky$, $y' = -x/y$. Newton-féle hűlési törvény megoldása. Differenciálegyenletek analitikus és geometriai szemlélete, iránymező, példa: $y' = -x/y$.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek: általános alak, megoldásra vonatkozó tétel, homogén egyenlet általános és inhomogén egyenlet partikuláris megoldása, alkalmazás (próbafejelet módszer): $y' + y = x$. Példa: a kis hangya és a gonosz manó, szabadon eső test mozgását leíró egyenlet, ha van légellenállás.

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek. A homogén egyenlet megoldásai vektorteret alkotnak. Az inhomogén egyenlet megoldásának általános alakja. Állandó együtthatós, homogén, másodrendű lineáris differenciálegyenletek: Abel tétele, Wronski-determináns, alaprendszer, a megoldások vektortere két-dimenziós, karakterisztikus egyenlet, alaprendszer a karakterisztikus egyenlet gyökeinek függvényében, alkalmazás: harmonikus rezgőmozgás, kényszerrezgés, rezonancia.

Jordan-mérték

A terület fogalma. Ponthalmazelméleti fogalmak: belső, külső és határpont, halmaz belseje, külseje, határa, lezártja. Gömb, téglalap, korlátosság és ekvivalens megfogalmazásai, egymásba nem nyúló halmazok. Külső és belső terület értelmezése. Négyzetrács a síkon, a b_n , k_n mennyiségek értelmezése és határértékeik. Jordan-mérhetőség. Téglalap mérhetősége és területe.

A terület tulajdonságai. A külső terület, belső terület ill a terület monotonitása. Példa nem mérhető halmazra. Egy négyzetrács minden tagja adott halmazra vonatkozóan vagy belső, vagy külső, vagy határnégyzet. A külső terület szubadditivitása, a belső terület szuperadditivitása, a terület additivitása. A terület eltolásinvarianciája. Normáltág. Halmaz lezártjának külső területe. Nullmértékű halmaz. Mérhetőség és a határ területe. Mérhető halmazok és halmazműveletek.

Konkrét halmazok területe. Síkbeli normáltartomány és területe. Alkalmazás: háromszög és ellipszis területe. Integrálható függvény grafikonjának területe, szakaszok és sokszögek mérhetősége.

Az egydimenziós Jordan-mérték. Egydimenziós Jordan-mérték alapfogalmai és tulajdonságai. Síkbeli alakzat szekciói, a terület kiszámítása szekciók segítségével. A Cantor-halmaz értelmezése és tulajdonságai, Jordan-mértéke, az ördög lépcsője, Sierpinski szőnyeg és háromszög.

A háromdimenziós Jordan-mérték. Háromdimenziós Jordan-mérték alapfogalmai és tulajdonságai. Szekciók, a térfogat mint szekcióterületek integrálja. Alkalmazás: forgáshenger, körkúp, forgástest térfogata. Cavalieri-elv, félgömb térfogata.

Kétváltozós integrál

Az integrál bevezetése. Téglalap felosztása. Kétváltozós függvény alsó és felső összege, kapcsolatuk. Alsó és felső integrál, integrálhatóság. Példák: konstansfüggvény, nem integrálható függvény.

Az integrál tulajdonságai. Hasznos kritérium. Lebontási tétel Riemann integrálható függvényekre. Heine tétel. Folytonos függvény integrálhatósága, nullmértékű halmaz kivételével folytonos függvény integrálhatósága, Fubini tétele. Általános halmazon való integrálás, karakterisztikus függvény és terület. Integrál és műveletek, egyenlőtlenségek. Az integrál additivitása.

Az integrál kiszámítása. integrálás téglalán, kétdimenziós normáltartományon, háromszögon, háromdimenziós normáltartomány térfogata.

Az integráltranszformáció. Integráltranszformáció tétele két dimenzióban, Jacobi-mátrix. Kapcsolat az egyváltozós helyettesítéses integrálással. Polárhelyettesítés, Jacobi determináns. A polárhelyettesítés alkalmazásai: negyedkör lap területe, félgömb térfogata, az $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ integrál kiszámítása.

Görbék.

Görbék. Görze, paraméterezés, példák: szakasz, körvonal, grafikon. Töröttvonal, ívhossz, rektifikálhatóság. Példa nem rektifikálható folytonos görbére. A rektifikálhatóság egy elégséges feltétele. Sebességvektor, az ívhossz kifejezése a sebességvektorral. Grafikon ívhossza. Ciklois paraméterezése és ívhossza. Polárkoordinátás alakú görbe ívhossza, példa: logaritmikus spirál.

Vonalintegrál. Motiváció: erőter görbén vett munkája. A vonalintegrál definíciója, elégséges feltétel a vonalintegrál létezésére, formula a kiszámítására. Példa, potenciál és primitív függvény, Newton-Leibniz tétele vonalintegrálokra. Ekvivalens állítások a primitív függvény létezéséhez. Keresztben vett parciális deriváltak. Példa, hogy ez szükséges, de nem elégséges a primitív függvény létezéséhez. Konvex tartományok esete.