KOMPLEX SOKASÁGOK
MSC-doktori iskola
2020. 2. félév.
4. gyakorlat

1. $M := \{z_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Határozzuk meg M normálnyalábját.
2. Legyen M komplex sokaság és $\Delta \subset M \times M$ az átló. Mi lesz Δ normálnyalábja?
3. $$L := \{ \text{ komplex egyenesek } \mathbb{C}^2 - \text{ben } \}.$$

   (a) Adjunk meg térképeket expliciten, melyek azt mutatják, hogy L egy komplex sokaság.

   (b) Mutassuk meg, hogy a természetes projekció $\pi : L \to \mathbb{P}^1$ holomorf és L egy holomorf vonalnyaláb.

   (c) Mutassuk meg, hogy minden $q \in \mathbb{C}^2$-re
   $$\sigma_q : \mathbb{P}^1 \to L, \quad \sigma_q(l) := l + q$$
   egy holomorf szelés.

   (d) Igazoljuk, hogy L-nek minden szelése σ_q alakú, megfelelő q választással.

   (e) Bizonyítsuk be, hogy minden $f \in \mathcal{O}(L)$ függvény konstans.
4. Legyen $E \to \mathbb{R}P^1$ a Möbius nyaláb. Mutassuk meg, hogy E nem triviális, de $E \oplus E$ és $E \otimes E$ igen.
5. Legyen $\tilde{f} : \Delta(0,1) \to \mathbb{C}^{n+1}$ holomorf, $\tilde{f}^{-1}(\vec{0}) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy az indukált leképezés $f : \Delta_* = \Delta \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ holomorfan kiterjed az origóba.
6. (a) $U_j = \{z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_j \neq 0\}$. $k \in \mathbb{Z}$. $z \in U_i \cap U_j$-re legyen $g_{ij}(z) = (z_j/z_i)^k$, ahol k egész. Mutassuk meg, hogy az ezekkel a ragasztófüggvényekkel $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ felett konstruált vonalnyaláb holomorfan triviális.

   (b) Konstruáljunk holomorfan nem triviális vonalnyalábot a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ bázistér felett.