

## Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. április 25.

9.1.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} dx = ?$$

Integráljunk egy 120 fokos szögtartomány határán.

9.2. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? **Mennyi ott a reziduum?**

$$(a) \frac{e^z - z^3 + 8}{z^2 + 1} \quad (b) \frac{e^z}{z^2 + 4} \quad (c) \frac{e^z}{(z^2 - 1)^3}$$

9.3. (a)

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin z - z} = ?$$

(b)

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin^3 z} = ?$$

9.4. Legyen  $f(z)$  holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0.

(a) Mit állít elő az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

(b) Mit állít elő az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot z dz$$

integrál?

9.5. Igazoljuk, hogy ha az  $f(z)$  függvény holomorf az  $a$  pont egy pontozott környezetében, és ott  $|f(z)| > 1$ , akkor  $a$  megszüntethető szingularitás vagy pólus.

9.6.

Lehet-e az  $f$  függvény izolált szingularitása  $e^f$ -nek pólusa?

### Házi feladatok

9.7.

Legyen  $f(z)$  holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0. Írjuk fel az  $f$  gyökeinek négyzetösszegét integrál alakban.

9.8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x+x^2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x+x^2} dx = ?$$

(Integráljunk félkörön. A végeredményben ne legyenek komplex számok!)