

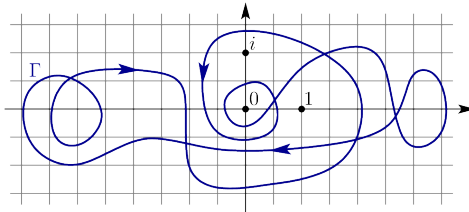
Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. április 11.

8.1. Az f függvény egyik Laurent sora

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

Milyen típusú f 0-beli szingularitása?

8.2. Legyen f egészfüggvény. Fejezzük ki $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^2 \cos z} dz$ értékét $f(0)$, $f(\pi)$, $f'(\pi/2)$ stb. segítségével.



8.3.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = ?$$

(Integráljunk a felső félkörön.)

8.4.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = ?$$

(Integráljunk a felső félkörön.)

8.5.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx = ?$$

Integráljunk egy 120 fokos szögtartomány határán.

8.6. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az a pont egy pontozott környezetében, és ott $|f(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

Házi feladatok

8.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3 + x} dx = ?$$

8.8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = ?$$

8.9. Számítsuk ki az alábbi integrálokat a reziduum tétel segítségével.

$$(a) \int_{|z|=4} \frac{1}{\sin z} dz \quad (b) \int_{|z|=8} \frac{1}{e^z - 1} dz \quad (c) \int_{|z|=\pi} \operatorname{tg} z dz$$

8.10. f holomorf 0 egy pontozott környezetében. Milyen típusú szingularitása van f -nek nullában, ha

- (a) $|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$,
(b) $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{5/2}}$?