Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. április 4.

7.1. Milyen típusú a szingularitás nullában?

$$(a)\ e^{\frac{1}{z^2}} \qquad (b)\ \frac{1}{z^4+z^2} \qquad (c)\ ctgz \qquad (d)\ \frac{1}{\cos z} \qquad (e)\ \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

7.2. Határozzuk meg a reziduumokat az adott pontban.

$$(a)\ e^{\frac{1}{3z}},\ z_0=0 \qquad (b)\ \frac{1}{z^3},\ z_0=0 \qquad (c)\ \frac{1}{z^4-1},\ z_0=i \qquad (d)\ \sin\frac{1}{z-1},\ z=1$$

7.3. Az f függvény egyik Laurent sora

$$\dots+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n-1}}+\dots+\frac{1}{z}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\dots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\dots$$

Milyen típusú f 0-beli szingularitása?

7.4. Számítsuk ki az alábbi integrálokat a reziduum tétel segítségével.

$$(a)\ \int\limits_{|z|=4}\frac{1}{\sin z}dz \qquad (b)\ \int\limits_{|z|=8}\frac{1}{e^z-1}dz \qquad (c)\ \int\limits_{|z|=\pi}\mathrm{tg}\ zdz$$

7.5. f holomorf 0 egy pontozott környezetében. Milyen típusú szingularitása van f-nek nullában, ha
(a) $|f(z)|\le\frac{1}{\sqrt{|z|}}$,
(b) $|f(z)|\le\frac{1}{|z|^{5/2}}$?

7.6. Igazoljuk, hogy ha az f függvény holomorf a nulla pont egy pontozott környezetében, és ott $|f(z)|>1$, akkor a nulla pont vagy megszüntethető szingularitás, vagy pólus.

7.7. Legyen $f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{z\to\infty}f(g(z))=\infty.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor f és g polinomok.

Házi feladatok

7.8. Legyen $f(z)=e^z-\sum_{n=0}^{5}\frac{z^n}{n!}$. Mennyi ekkor

$$\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)}dz?$$

7.9. Milyen típusú a szingularitás, mennyi a reziduum?

$$(a)\ \frac{z}{e^z-1},\ z_0=0 \qquad (b)\ \frac{1}{\sin z-\cos z},\ z_0=\frac{\pi}{4} \qquad (c)\ \frac{z^3}{\sin z-z+z^3/3!},\ z_0=0 \qquad (d)\ \frac{1}{1-e^z},\ z_0=0$$

7.10. A reziduumtétellel számoljuk ki

$$(a)\ \int\limits_{|z|=3}\frac{1}{e^{2z}-1} \qquad (b)\ \int\limits_{|z|=4}\frac{1}{e^{2z}-1} \qquad (c)\ \int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^4-1} \qquad (d)\ \int\limits_{|z|=6}\frac{\sin z}{z^4-1}\mathrm{d}z$$