Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. március 21.

6.1. Számoljuk ki a $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvény 0 körüli Laurent sorait. Adjuk meg a sorok konvergenciatartományát is (a tartomány határán nem kell vizsgálni a konvergenciát).

6.2. Igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény. (1. módszer: alkalmazzuk az unicitástételt az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvényekre. 2. módszer: fejtsük hatványsorba a függvényt a 0 körül, és vizsgáljuk az együtthatókat.)

6.3. Számítsuk ki az

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} \mathrm{d}z$$

integrált.

6.4. Létezik-e ilyen nem konstans egészfüggvény?

1. $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ teljesül minden $|z| > 2$ esetén?
2. A síkot az egységkör külsejébe viszi.

6.5. Írjuk fel a $\operatorname{ctg} z$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0, \pi)$-ön konvergens Laurent sorának első két nemnulla tagját.

6.6. Melyek azok a $p(z) = z^2 + az + b$ alakú polinomok, melyekre az

$$f(z) = \frac{p(z)}{z^2(z-1)^2}$$

függvénynek van primitív függvénye $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$-en?

6.7. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy tartományon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

6.8. Az f függvény holomorf az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max\limits_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi \leq t \leq 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$. (Írjuk fel a maximum-elvet egy alkalmas függvényre.)

6.9. Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

függvény 0 körüli Laurent sorait.