

Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. február 14.

2.1. Van-e olyan 0-ban komplex deriválható függvény, mely az $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ helyeken rendre az alábbi értékeket veszi fel:

- a) $0, 1, 0, 1, \dots$,
- b) $0, 1/2, 0, 1/4, 0, 1/6, \dots$,
- c) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots$

2.2.

Számítsuk ki i^i összes értékét.

2.3. Számítsuk ki $\log(1+i)$ összes értékét.

2.4. Fejtsük hatványsorba a 0 körül az $f(z) = \frac{1}{z+3}$ függvényt.

2.5. Hol konvergálnak és melyik holomorf függvényhez az alábbi hatványsorok?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (2z+1)^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1)^n$$

2.6. Ábrázoljuk a síkon a következő halmazt:

$$\left\{ e^z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\};$$

2.7. Mi lesz a $\sin z$ függvény értékkészlete?

2.8. Differenciálható-e 0-ban?

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} & \text{ha } z \neq k\pi \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

2.9. Mutassuk meg, hogy a

$$\sin z = z$$

egyenlet egyetlen megoldása $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ -ben: $z = 0$.

Házi feladatok

2.10. Van-e határértéke az e^{-1/z^4} függvénynek a 0-ban?

2.11. Igaz vagy hamis?

- (a) Ha az $f(z)$ függvény differenciálható a z_0 pontban, akkor $\overline{f(z)}$ differenciálható a z_0 pontban.
- (b) Ha $f(z)$ differenciálható z_0 -ban, akkor $f(\bar{z})$ differenciálható \bar{z}_0 -ban.
- (c) Ha $f(z)$ függvény differenciálható z_0 -ban, akkor $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ differenciálható \bar{z}_0 -ban.

2.12. Mely $z \in \mathbb{C}$ -re teljesül $\sin z = 0$?