

## Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. május 2.

10.1.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx = ?$$

Integráljunk egy 120 fokos szögtartomány határán.

10.2. Hol vannak az alábbi függvénynek izolált szingularitásai? Mi a szingularitás típusa? **Mennyi ott a reziduum?**

$$\frac{e^z - z^3 + 8}{z^2 + 1}$$

10.3.

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin z - z} = ?$$

10.4. Legyen  $f(z)$  holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0.

(a) Mit állít elő az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

(b) Mit állít elő az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot z dz$$

integrál?

10.5. Igazoljuk, hogy ha az  $f(z)$  függvény holomorf az  $a$  pont egy pontozott környezetében, és ott  $|f(z)| > 1$ , akkor  $a$  megszüntethető szingularitás vagy pólus.

10.6. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke van a  $z^7 + 3z^2 - z$  függvénynek az egységkörben.

10.7.

Lehet-e az  $f$  függvény izolált szingularitása  $e^f$ -nek pólusa?

### Házi feladatok

10.8. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mi a szingularitás típusa? **Mennyi ott a reziduum?**

$$(a) \frac{e^z}{z^2 + 4} \quad (b) \frac{e^z}{(z^2 - 1)^3}$$

10.9.

Legyen  $f(z)$  holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0. Írjuk fel az  $f$  gyökeinek négyzetösszegét integrál alakban.

10.10.

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin^3 z} = ?$$

10.11. Legyen  $a$  komplex szám,  $|a| = 3.1$ . Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a  $z^4 + z^3 + az - 1$  polinomnak az  $1 < |z| < 2$  tartományon?

Útmutatás: Hány gyök van az 1, és 2 sugarú körön belül a Rouché tétel szerint?